Physique des Fluides - ED n°2

PACES - UE 3b - 2019-2020 - Corrigé

Exercice n°1

Un plongeur situé à **10 m** de profondeur relâche un chapelet de bulles d'air sphériques d'un diamètre de **1 mm**. Dans un premier temps, le volume d'une bulle est considéré comme constant. On appelle ρ la masse volumique de l'eau. La masse volumique de l'air est ρ_A **= 1 kg.m⁻³**. La viscosité de l'eau est η **= 10⁻³ Pa.s**.

Question n°1 : Soit P_0 **= 10⁵ Pa**, la pression atmosphérique, déterminer la valeur de la pression P_B à l'intérieur de la bulle, la tension superficielle est γ **= 7,5.10⁻² N/m**. *(Coefficient 1)*

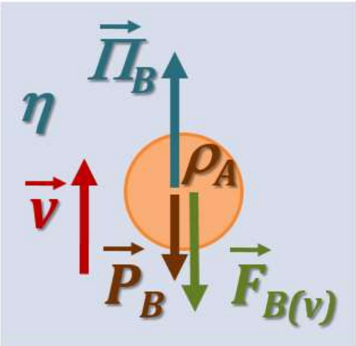
- **A.** P_B = 75 Pa
- **B.** P_B = 750 Pa
- **C.** P_B = 100075 Pa
- **D.** P_B = 100750 Pa
- **E.** P_B = 200075 Pa

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = P_B - (P_0 + \rho g H) = \frac{4\gamma}{d} \quad \Rightarrow P_B = P_0 + \rho g H + \frac{4\gamma}{d}$$

$$\Rightarrow P_B = 10^5 + (10^3.10.10) + \frac{4.7,5.10^{-2}}{10^{-3}} = 200075\ Pa$$

Question n°2 : déterminez l'expression de la vitesse v de remontée d'une bulle d'air (quand elle a atteint sa vitesse limite). *(Coefficient 2)*

- **A.** $v = \frac{2(\rho-\rho_A)R_B^3 g}{9\mu}$
- **B.** $v = \frac{2(\rho-\rho_A)R_B^2}{9\mu}$
- **C.** $v = \frac{2(\rho-\rho_A)R_B^2 g}{6\mu}$
- **D.** $v = \frac{(\rho-\rho_A)R_B^2 g}{9\mu}$
- **E.** $v = \frac{2(\rho-\rho_A)R_B^2 g}{9\mu}$



$$\vec{P}_B = \rho_A \frac{4}{3}\pi R_B^3 \vec{g}, \quad \vec{\Pi}_B = -\rho \frac{4}{3}\pi R_B^3 \vec{g} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{B(v)} = -6\pi\eta R_B \vec{v}$$

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (\rho - \rho_A)\frac{4}{3}\pi R_B^3 \vec{g} - 6\pi\eta R_B \vec{v} = \vec{0} \quad \Rightarrow v = \frac{2(\rho - \rho_A)R_B^2}{9\eta} g$$

Question n°3 : Quelle(s) est ou sont la ou les proposition(s) vraie(s) ? *(Coefficient 1)*

- **A.** ρ vaut 10^3 kg/m³
- **B.** ρ vaut 10^6 kg/m³
- **C.** ρ vaut 1 kg/m³
- **D.** ρ_A est négligeable devant ρ
- **E.** ρ_A et ρ sont de même ordre de grandeur

Question n°4 : Calculez la vitesse v de remontée d'une bulle d'air (quand elle a atteint sa vitesse limite). *(Coefficient 1)*

- **A.** v = 1,1 m.s^{-1}
- **B.** v = 1,1.10^{-2} m.s^{-1}
- **C.** v = 1,1.10^{-1}
- **D.** v = 5,5 m.s^{-1}
- **E.** v = 0,55 m.s^{-1}

$$\rho_A \ll \rho \Rightarrow v = \frac{2\rho R_B^2}{9\eta} g \qquad AN: v = \frac{2.10^3.(0,5.10^{-3})^2}{9.10^{-3}}.10 = 0,55\, m.s^{-1}$$

On considère l'air comme un gaz parfait. Cela signifie que la relation P.V = C^{te} est vérifiée. En d'autres termes, pour un gaz parfait, le produit de la pression par le volume est constant.

Question n°5 : En négligeant l'effet de la tension superficielle, quelle sera le diamètre d'une des bulles d'air à 5 m de profondeur. *(Coefficient 4)*

- **A.** d = 1,45 mm
- **B.** d = 1,1 mm
- **C.** d = 1.06 mm
- **D.** d = 2,9 mm
- **E.** d = 2,2 mm

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} \qquad P_{10}.V_{10} = P_5.V_5 \Rightarrow V_5 = \frac{P_{10}.V_{10}}{P_5}$$

$$V_{10} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{10^{-3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}10^{-9}$$

$$P_x = P_0 + \rho g h_x \Rightarrow P_5 = 10^5 + \left(10^3 \times 10 \times 5\right) = 1,5.10^5\, Pa$$

$$\Rightarrow P_{10} = 10^5 + \left(10^3 \times 10 \times 10\right) = 2.10^5\, Pa$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}},\ V_5 = \frac{P_{10}.V_{10}}{P_5} \quad et \quad V_{10} = \frac{\pi}{6}10^{-9}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{6P_{10}V_{10}}{\pi P_5}} = \sqrt[3]{\frac{6P_{10}\pi 10^{-9}}{\pi P_5 6}} = \sqrt[3]{\frac{P_{10}10^{-9}}{P_5}} = \sqrt[3]{\frac{2.10^{-9}}{1,5}} = \sqrt[3]{\frac{2}{1,5}} \times 10^{-3} = 1,1\ 10^{-3}\ m$$

Exercice n°2

Phénomène de Cavitation.

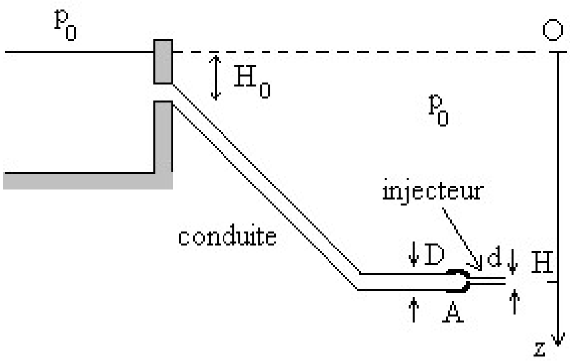
Il se produit un phénomène de cavitation au sein d'un fluide lorsque la pression à l'intérieur de ce fluide devient inférieure à la tension de vapeur de ce fluide pour une température donnée. Le liquide se vaporise alors spontanément créant des bulles de gaz.

Une conduite, de diamètre $D = 30\ cm$, de longueur $l = 200m$, amène l'eau (masse volumique $\rho = 10^3\ kg.m^{-3}$) d'un barrage vers la turbine d'une centrale hydroélectrique située à $H = 160\ m$ au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage.

Le barrage a une grande capacité si bien que l'on peut considérer que le niveau de la surface libre est constant.

Le départ de la conduite est situé à $H_0 = 20\ m$ au-dessous de la surface libre.

On donne la pression atmosphérique $P_0 = 10^5\ Pa$, la pesanteur $g = 10\ m.s^{-2}$, la pression de vapeur de l'eau à $20°\ C$, $P_v = 2300\ Pa$.



Question n°1 L'extrémité aval de la conduite en A est à l'air libre.

- **A.** Il n'y a pas de cavitation.
- **B.** Il y a cavitation à $z_C = 90\ m$ au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage.
- **C.** Il y a cavitation à $z_C = 110\ m$ au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage.
- **D.** Il y a cavitation à $z_C = 130\ m$ au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage.
- **E.** Il y a cavitation à $z_C = 150\ m$ au-dessous de la surface libre de l'eau dans le barrage.

Soit *C*, un point quelconque de la conduite. Conservation du débit $\Rightarrow S.v_c = S.v_A$

Bernoulli entre C et A $\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_C^2 + P_C - \rho g z_C = \frac{1}{2}\rho v_A^2 + P_A - \rho g H \Rightarrow P_C = P_0 - \rho g(H - z_C)$

$(z_C \; et \; H \; négatifs)$

Cavitation si $P_C < P_v$ $\Rightarrow P_C = P_0 - \rho g(H - z_C) < P_v \Leftrightarrow z_C > H - \frac{P_0 - P_v}{\rho g} \Rightarrow z_C > 160 - \frac{10^5}{10^3.10} = 150\,m$

Question n°2

On visse à l'extrémité de la conduite, en A, une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre final d.

- **A.** Dispositif inutile, il n'y avait pas de cavitation.
- **B.** La cavitation disparait si $d < 25\,cm$.
- **C.** La cavitation disparait si $d < 20\,cm$.
- **D.** La cavitation disparait si $d < 15\,cm$.
- **E.** La cavitation disparait si $d < 10\,cm$.

Conservation du débit. $\Rightarrow S.v_c = s_i.v_i \Rightarrow v_c = \frac{d^2}{D^2}.v_i$

Bernoulli entre C et sortie injecteur : $\frac{1}{2}\rho v_C^2 + P_C - \rho g z_C = \frac{1}{2}\rho v_i^2 + P_0 - \rho g H$

$$\Rightarrow P_C = P_0 - \rho g(H - z_C) + \frac{1}{2}\rho v_i^2 - \frac{1}{2}\rho v_C^2 \Leftrightarrow P_C = P_0 - \rho g(H - z_C) + \frac{1}{2}\rho v_i^2.\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

$$\left(v_c = \frac{d^2}{D^2}.v_i\right)$$

Bernoulli entre surface libre et sortie injecteur : $\frac{1}{2}\rho v_{sl}^2 + P_0 - \rho g 0 = \frac{1}{2}\rho v_i^2 + P_0 - \rho g H$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_i^2 - gH = 0 \Rightarrow v_i^2 = 2gH, \quad or \quad P_C = P_0 - \rho g(H - z_C) + \frac{1}{2}\rho v_i^2.\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

$$\Rightarrow P_C = P_0 - \rho g(H - z_C) + \rho g H.\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \Leftrightarrow P_C = P_0 + \rho g z_C - \rho g H.\frac{d^4}{D^4}$$

Pas de cavitation : $\Rightarrow P_C = P_0 + \rho g z_C - \rho g H.\frac{d^4}{D^4} > P_v$

$$\Leftrightarrow \rho g H.\frac{d^4}{D^4} < P_0 - P_v + \rho g z_C \Leftrightarrow \frac{d^4}{D^4} < \frac{P_0 - P_v}{\rho g H} + \frac{\rho g z_C}{\rho g H} \Rightarrow d < D.\sqrt[4]{\frac{P_0}{\rho g H} + \frac{H_0}{H}}$$

$$(H_0 \leq z_c \leq H)$$

AN : $$d < 0,3.\sqrt{\sqrt{\frac{10^5}{10^3.10.160}+\frac{20}{160}}} = 0,3.\sqrt{\sqrt{\frac{30}{160}}} \simeq 0,197\,m$$

Question n°3

L'injecteur a un diamètre de sortie d = 15 cm. Calculer la vitesse v_i de l'eau à la sortie de l'injecteur.

- **A.** $v_i = 30$
- **B.** $v_i = 30\,m/s$
- **C.** $v_i = 56$
- **D.** $v_i = 56\,m.s^{-1}$
- **E.** $v_i = 78\,m/s$

$$v_i^2 = 2gH \Rightarrow v_i = \sqrt{2gH} = \sqrt{2.10.160} \simeq 56\,m/s$$

Exercice n°3

On considère un compte-gouttes de rayon extérieur **R** et de rayon intérieur **r**. Ce compte-gouttes contient une certaine quantité d'eau. Initialement, à la base du compte-gouttes, l'eau forme une goutte hémisphérique de rayon **R**. La colonne d'eau, de hauteur **h**, à l'intérieur du compte-gouttes se termine à son sommet par un ménisque de rayon **r**.

Soit **g** l'accélération due à la pesanteur, γ la tension superficielle de l'eau et ρ la masse volumique de l'eau.

Question n°1 : Donnez l'expression de la pression P_M sous le ménisque. *(Coefficient 1)*

- **A.** $P_M = \gamma/r$
- **B.** $P_M = 2\gamma/r$
- **C.** $P_M = P_{Atm} - \gamma/r$
- **D.** $P_M = P_{Atm} - 2\gamma/r$
- **E.** $P_M = 4\gamma/r$

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{r} \quad et \quad \Delta P = P_{Atm} - P_M \quad \Rightarrow \quad P_M = P_{Atm} - \frac{2\gamma}{r}$$

Question n°2 : Donnez l'expression de **h**. *(Coefficient 2)*

- **A.** $h = \frac{2\gamma}{\rho g(r+R)} - R$
- **B.** $h = \frac{2\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$
- **C.** $h = \frac{\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) - R$
- **D.** $h = \frac{2\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right) - R$
- **E.** $h = \frac{\rho g(r+R)}{\gamma} + R$

$$P_M = P_{Atm} - \frac{2\gamma}{r}, P_G = P_{Atm} + \frac{2\gamma}{R} \; et \; P_G - P_M = \rho g(h+R) \Rightarrow \rho g(h+R) = \frac{2\gamma}{R} + \frac{2\gamma}{r}$$
$$\Rightarrow h + R = \frac{2\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) \Rightarrow h = \frac{2\gamma}{\rho g}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) - R$$

Question n°3 : Juste au moment de se détacher, la goutte prend la forme d'une sphère de rayon **R**. Sachant que la force de tension superficielle est **F = 2πRγ**, déterminer l'expression de **R**. *(Coefficient 2)*

- **A.** $R = \sqrt{\frac{3\gamma}{2\rho g}}$
- **B.** $R = \frac{3\gamma}{2\rho g}$
- **C.** $R = \sqrt{\frac{3\rho g}{2\gamma}}$
- **D.** $R = \frac{2\pi\gamma}{\rho g}$
- **E.** $R = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\rho g}}$

$$P = F, \; P = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g \; et \; F = 2\pi R\gamma \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = 2\pi R\gamma \Rightarrow R^2 = \frac{3\gamma}{2\rho g} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{3\gamma}{2\rho g}}$$

Question n°4 : Soit $\mathbf{P_0 = 10^5}$ **Pa**, la pression atmosphérique, déterminer la valeur de la pression $\mathbf{P_G}$ à l'intérieur de la goutte, une fois celle-ci détachée, pour **R = 3 mm** et γ **= 7,5.10^{-2} N/m**. *(Coefficient 1)*

- **A.** P_G = 50 Pa
- **B.** P_G = 500 Pa
- **C.** P_G = 5000 Pa
- **D.** P_G = 100050 Pa
- **E.** P_G = 105000 Pa

$$\Delta P = \frac{2\gamma}{R} = P_G - P_0 \Rightarrow P_G = P_0 + \frac{2\gamma}{R} \Rightarrow P_G = 10^5 + \frac{2 \times 7,5.10^{-2}}{3.10^{-3}} = 100050 \; Pa$$